

**7 skyrius | Kvadratinė funkcija** 4

**Skyriaus uždaviniai** 4

**Tyrimo užduotis**

    Kaip išpjauti didžiausią? 5

**Pakartokite** 6

**Sužinokite, išsiaiškinkite**

    1. Paprasčiausios kvadratinės funkcijos 11

    2. Kvadratinė funkcija  $f(x) = ax^2 + c$  15

    3. Kvadratinė funkcija  $f(x) = a(x - m)^2$  19

**Išmokite**

    1. Sudėtingesnės kvadratinės funkcijos 24

    2. Kvadratinė funkcija  $f(x) = ax^2 + bx + c$  29

**Taikykite**

    Kvadratinės funkcijos savybių taikymo uždaviniai 34

**Įsivertinkite** 38

**Tyrimo apibendrinimas**

    Kaip išpjauti didžiausią? 40

**Priimkite iššūkį** 41

**Kartojimo uždaviniai** 42

**Papildomos užduotys ir projektai**

    Tiltai 43

**8 skyrius | Kvadratinės nelygybės** 44

**Skyriaus uždaviniai** 44

**Tyrimo užduotis**

    Apsidairykime 45

**Pakartokite** 46

**Sužinokite, išsiaiškinkite**

    Kvadratinė nelygybė 50

**Išmokite**

    1. Kvadratinų nelygybių sprendimas grafiniu būdu 54

    2. Kvadratinų nelygybių sprendimas algebriniu būdu 58

    3. Nelygybių sprendimas intervalų metodu 60

**Taikykite**

    Žodinių uždavinių sprendimas sudarant kvadratinės nelygybes 63

**Įsivertinkite** 67

**Tyrimo apibendrinimas**

    Apsidairykime 69

**Priimkite iššūkį** 70

**Kartojimo uždaviniai** 71

**Papildomos užduotys ir projektai**

    Grafinis nelygybių sprendimas 73

**9 skyrius | Tiesės ir plokštumos erdvėje** 74

**Skyriaus uždaviniai** 74

**Tyrimo užduotis**

    Teiginiai, kurių įrodyti nereikia 75

**Pakartokite** 76

**Sužinokite, išsiaiškinkite**

    1. Tiesių tarpusavio padėtis erdvėje 78

    2. Tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis erdvėje 83

    3. Plokštumų tarpusavio padėtis 86

**Išmokite**

    Pasviroji ir pasvirošios projekcija plokštumoje 89

**Taikykite**

    Kampas tarp tiesės ir plokštumos 92

**Įsivertinkite** 96

**Tyrimo apibendrinimas**

    Teiginiai, kurių įrodyti nereikia 98

**Priimkite iššūkį** 99

**Kartojimo uždaviniai** 100

**Papildomos užduotys ir projektai**

    Erdvinių kūnų braižymas kompiuteriu 101

**10 skyrius | Kombinatorika ir tikimybės** 102

**Skyriaus uždaviniai** 102

**Tyrimo užduotis**

    Ar galima prognozuoti sėkmę? 103

**Pakartokite** 104

**Sužinokite, išsiaiškinkite**

    Įvykio tikimybė 108

**Išmokite**

    1. Kombinatorinė sudėties taisyklė. Kombinatorinė daugybos taisyklė 114

    2. Rinkinių iš tos pačios aibės elementų sudarymas 117

**Taikykite**

    Kombinatorinės sudėties arba kombinatorinės daugybos taisyklės taikymas skaičiuojant įvykio tikimybę 124

**Įsivertinkite** 129

**Tyrimo apibendrinimas**

    Ar galima prognozuoti sėkmę? 131

**Priimkite iššūkį** 132

**Kartojimo uždaviniai** 133

**Papildomos užduotys ir projektai**

    Mokslas ar melas? 135

**11 skyrius | Statistika** 136

**Skyriaus uždaviniai** 136

**Tyrimo užduotis**

    Statistika valdo! 137

**Pakartokite** 138

**Sužinokite, išsiaiškinkite**

    1. Kokias imtis ir kaip reikia grupuoti intervalais? 142

    2. Imties vidurkis, moda ir mediana 144

**Išmokite**

    1. Sugrupuotų duomenų grafinis vaizdavimas 150

    2. Kaip tinkamai vaizduoti duomenis? 155

    3. Koreliacija 160

**Taikykite**

    Statistinis tyrimas 165

**Įsivertinkite** 172

**Tyrimo apibendrinimas**

    Statistika valdo! 174

**Priimkite iššūkį** 175

**Kartojimo uždaviniai** 177

**Papildomos užduotys ir projektai**

    Eksperimentinė psichologija 178

**12 skyrius | Pasitikrinkite ir įsivertinkite** 180

1 testas. Realieji skaičiai. Kvadratinės šaknys. Laipsniai. Procentai 181

2 testas. Tiesinių lygčių sistemos. Kvadratinė lygtis. Trupmeninės lygtys 182

3 testas. Funkcija. Tiesinė funkcija. Atvirkštinio proporcingumo funkcija. Kvadratinė funkcija 183

4 testas. Tiesinių nelygybių sistemos. Kvadratinės nelygybės 185

5 testas. Sveikieji reiškiniai. Trupmeniniai reiškiniai 186

6 testas. Kombinatorika ir tikimybės. Statistika 188

7 testas. Tiesės ir plokštumos erdvėje. Sukiniai. Briaunainiai 190

8 testas. Koordinatų metodas. Trigonometriniai sąryšiai stačiajame trikampyje 192

9 testas. Panašumas. Apskritimas ir skritulys 194

10 testas. Įvairios 9–10 klasės matematikos kurso kartojimo užduotys 197

11 testas. Įvairios 9–10 klasės matematikos kurso kartojimo užduotys 199

12 testas. Pagrindinės mokyklos matematikos kurso kartojimas 200

13 testas. Pagrindinės mokyklos matematikos kurso kartojimas 203

**Šaltiniai** 207



QR kodu žymimi su tema susiję skaitmeniniai ištekliai. Įveskite trumpąją nuorodą į adresų juostą arba nuskenuokite kodą telefonu.

# 7 SKYRIUS

## KVADRATINĖ FUNKCIJA

### 1 PRISIMINSITE

- kas vadinama funkcija ir jos grafiku;
- kas vadinama argumento reikšme ir funkcijos reikšme;
- kaip iš grafiko nustatyti funkcijos savybes;
- kokios funkcijos vadinamos tiesinėmis, kokios – atvirkštinio proporcingumo funkcijomis;
- kokios yra šių funkcijų savybės.

### 2 SUŽINOSITE, IŠSIAIŠKINSITE

- kokia funkcija vadinama kvadratine funkcija;
- kaip nubraižyti funkcijos  $f(x) = ax^2$  grafiką;
- kokios savybės būdingos funkcijai  $f(x) = ax^2$ ;
- kaip nubraižyti funkcijų  $f(x) = ax^2 + c$ ,  $f(x) = a(x - m)^2$  grafikus;
- kokios savybės būdingos šioms funkcijoms;
- kaip remiantis kvadratinės funkcijos grafiku užrašyti tos funkcijos formulę.

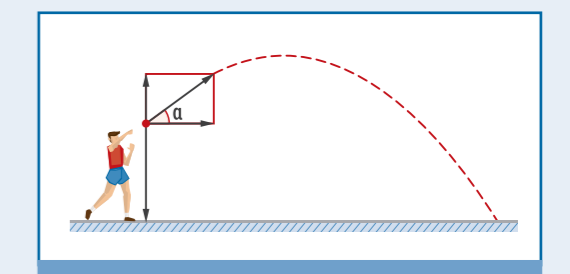
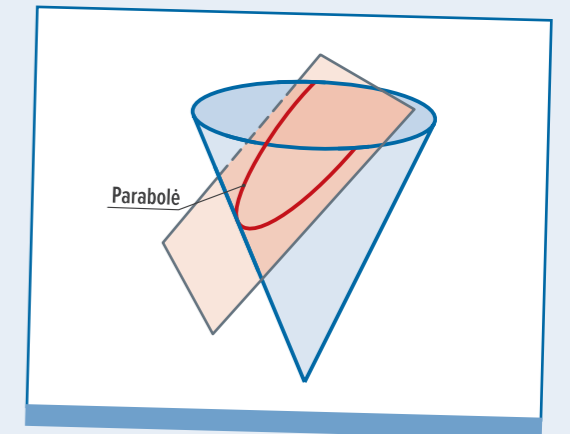
### 3 IŠMOKSITE

- nubraižyti kvadratinių funkcijų  $f(x) = a(x - m)^2 + n$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  grafikus;
- nustatyti šių funkcijų savybes;
- remdamiesi kvadratinių funkcijų grafikais užrašyti tų funkcijų formules;
- spręsti lygtis grafiniu būdu, remdamiesi kvadratinių funkcijų grafikais;
- spręsti optimizavimo uždavinius, taikydami kvadratinės funkcijos savybes.

## Kaip išpjauti didžiausią?


9 klasėje pasitelkdami vadovėlyje pateiktą informaciją nagrinėjote tiesines ir atvirkštinio proporcingumo funkcijas. Šiame skyriuje pažintį su funkcijomis tęsime – aptarsime kvadratinės funkcijas ir jų savybes. Šių funkcijų grafikai vadinami **parabolėmis**. Parabolę galima gauti kertant kugį plokštuma, lygiagrečia su kugio sudaromąja (žr. brėžinį).

Parabolę galima pastebėti ir gyvenimiškoje aplinkoje. Pavyzdžiui, kampu į tolį mestas akmuo, veikiamas sunkio jėgos, lekia parabole. Oro pasipriešinimas iškreipia akmens judėjimo trajektoriją. Tačiau, jei akmuo skrietų tuštuma be pasipriešinimo, tai jo judėjimo trajektorija būtų parabolės formos.



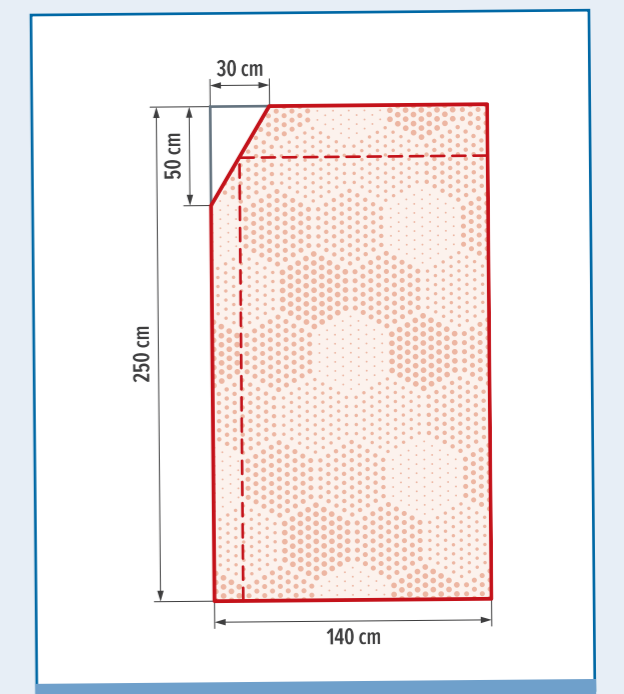
Parabolės formos arkų turi Vilniaus Žvėryno tiltas – seniausias (pastatytas 1906 m.) išlikęs tiltas per Nėrį, jungiantis Gedimino prospektą su Žvėryno rajonu.

Kvadratinių funkcijų savybės taikomos sprendžiant gyvenimiško turinio uždavinius, kai reikia rasti didžiausią (mažiausią) plotą, perimetrą, didžiausią pelną, mažiausią kainą ir pan.

 Nagrinėkime tokią situaciją. Kilimų parduotuvėje buvo sugadintas 250 cm ilgio ir 140 cm pločio kilimas, todėl vieną jo kampą teko nukirpti. Nukirptasis kampas yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai 50 cm ir 30 cm. Buvo nutarta iš likusios dalies išpjauti stačiakampio formos **didžiausio ploto** kilimo dalį ir ją apsiuvus panaudoti parduotuvės ekspozicijoje. Iškilo klausimas: kiek turėtų būti išpjauamos kilimo dalies matmenys, kad tos dalies plotas būtų didžiausias?

Norint atsakyti į šį klausimą, reikia sudaryti formulę išpjauamos dalies plotui apskaičiuoti ir pasinaudoti ta formule išreikštos funkcijos savybėmis.

Šiame skyriuje išmoksime taikyti kvadratinių funkcijų savybes, ieškodami funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmės.





- Kas vadinama funkcija?
- Kas vadinama argumento reikšme ir funkcijos reikšme?
- Kaip apskaičiuoti:
  - funkcijos reikšmę, kai žinoma argumento reikšmė;
  - argumento reikšmę, kai žinoma funkcijos reikšmė?
- Kas vadinama funkcijos grafiku?
- Kaip remiantis funkcijos grafiku nustatyti:
  - funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis;
  - funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus;
  - intervalus, kuriuose funkcija įgyja teigiamas reikšmes, neigiamas reikšmes?

**Funkcija** – tai taisyklė, pagal kurią kiekvienai  $x$  reikšmei priskiriama vienintelė  $y$  reikšmė.

Funkcija užrašoma taip:  $y = f(x)$ ; čia  $x$  – nepriklausomasis kintamasis, arba argumentas,  $y$  – priklausomasis kintamasis, arba funkcijos reikšmė.

- Funkcijos  $f(x) = 5 - 6x$  reikšmė, kai argumento reikšmė lygi  $-2$ , apskaičiuojama į funkcijos formulę vietoj  $x$  įrašius  $-2$ :  
 $f(-2) = 5 - 6 \cdot (-2) = 5 + 12 = 17$ .
- Argumento reikšmė, su kuria funkcijos  $f(x) = 5 - 6x$  reikšmė lygi  $11$ , apskaičiuojama į funkcijos formulę vietoj  $f(x)$  įrašius  $11$ :  
 $11 = 5 - 6x$ ,  $6x = -6$ ,  $x = -1$ .

**Funkcijos  $f(x)$  grafiku** vadinama visuma koordinatinių plokštumos taškų  $(x; f(x))$ .

Norėdami nustatyti, ar taškas  $A(2; -7)$  priklauso funkcijos  $f(x) = 5 - 6x$  grafikiui, turime patikrinti, ar vietoj  $x$  įrašę  $2$ , o vietoj  $f(x)$  įrašę  $-7$ , gauname teisingą lygybę:  
 $-7 = 5 - 6 \cdot 2$ ,  $-7 = -7$ .

Gauta lygybė yra teisinga, todėl taškas  $A$  priklauso funkcijos grafikiui.

- 1** Duota funkcija  $f(x) = 3x - 8$ . Apskaičiuokite:
  - a) funkcijos reikšmę, kai argumento reikšmė lygi  $-3$ ;  $0$ ;  $3,8$ ;  $11$ ;
  - b) argumento reikšmę, su kuria funkcijos reikšmė lygi  $-11$ ;  $0$ ;  $7$ ;  $5,5$ .

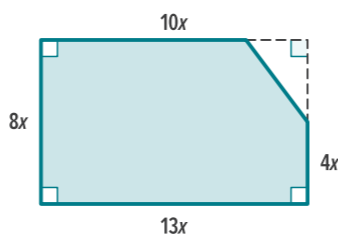
- 2** Duota funkcija  $f(x) = \frac{4x+1}{5}$ . Apskaičiuokite:
  - a) priklausomojo kintamojo reikšmę, kai nepriklausomojo kintamojo reikšmė lygi  $-2,5$ ;  $0$ ;  $6$ ;
  - b) nepriklausomojo kintamojo reikšmę, su kuria priklausomojo kintamojo reikšmė lygi  $-7$ ;  $0$ ;  $5,4$ .

- 3** Apskaičiuokite  $f(-6)$ , kai:
 

a) $f(x) = -\frac{2x}{3} + 4$ ;	b) $f(x) = 5x^2 + 11$ ;
c) $f(x) = -\frac{9}{x+3} - 1$ ;	d) $f(x) = \sqrt{13 - 2x}$ .

- 4** Brėžinyje pavaizduota figūra.

1. Sudarykite formulę pavaizduotos figūros perimetrui apskaičiuoti.
2. Apskaičiuokite šios figūros perimetrą, kai  $x$  reikšmė lygi  $3,8$  cm.
3. Apskaičiuokite šios figūros ilgiausios kraštinės ilgį, kai perimetras lygus  $60\sqrt{3}$  cm.



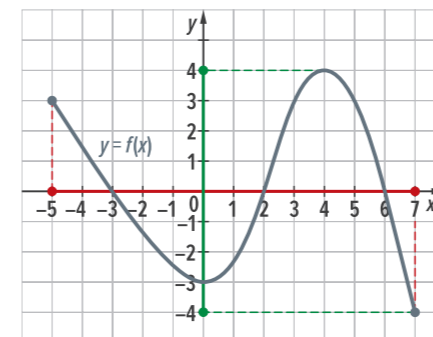
- 5** Ar taškas  $A$  priklauso funkcijos  $f(x) = 0,2x + 4$  grafikiui, kai:
 

a) $A(-5; 3)$ ;	b) $A(0; -4)$ ;	c) $A(-3; -3,6)$ ;	d) $A(-10; 2)$ ?
-----------------	-----------------	--------------------	------------------
- 6** Kurios funkcijos grafikiui priklauso taškas  $A(3; -2,5)$ ?
 

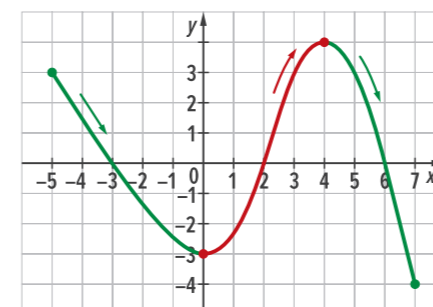
A $f(x) = -\frac{2x}{3} + 4$	B $f(x) = 5x^2 + 11$
C $f(x) = -\frac{9}{x+3} - 1$	D $f(x) = \sqrt{13 - 2x}$
- 7** Apskaičiuokite  $a$  reikšmę, jei yra žinoma, kad taškas  $A(2a; a - 2)$  priklauso funkcijos  $f(x) = 0,2x + 4$  grafikiui.

Visos galimos nepriklausomojo kintamojo  $x$  reikšmės sudaro funkcijos  $y = f(x)$  **apibrėžimo sritį**. Ji žymima  $D(f)$ .

Visos reikšmės, kurias įgyja priklausomasis kintamasis  $y$ , sudaro funkcijos **reikšmių sritį**. Ji žymima  $E(f)$ .

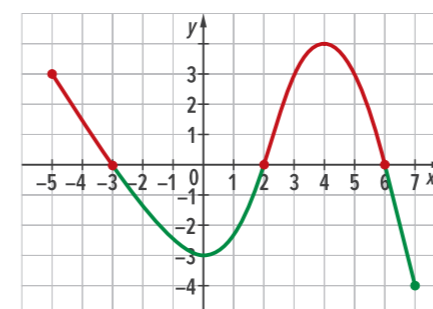


Apibrėžimo sritis:  $D(f) = [-5; 7]$ .  
 Reikšmių sritis:  $E(f) = [-4; 4]$ .



Funkcija yra didėjančioji, kai  $x \in (0; 4)$ .

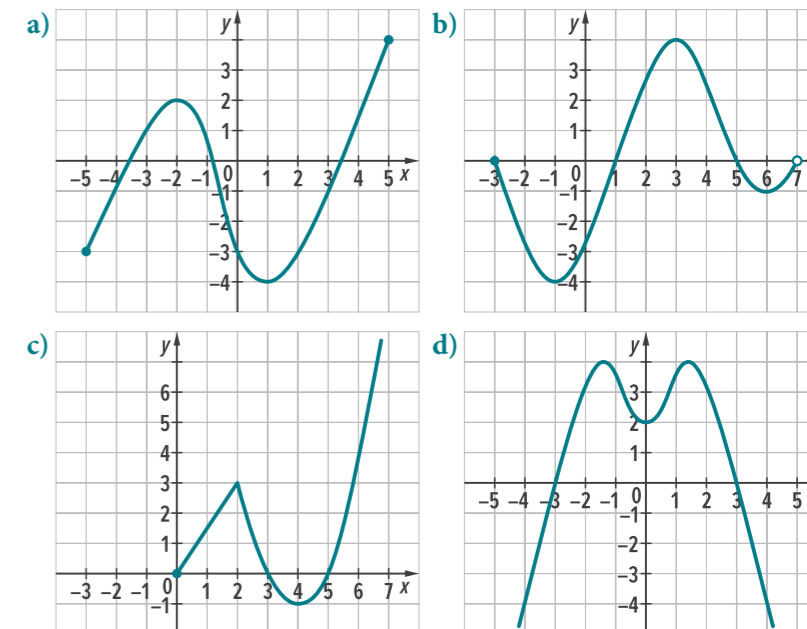
Funkcija yra mažėjančioji, kai  $x \in (-5; 0)$  ir  $x \in (4; 7)$ .



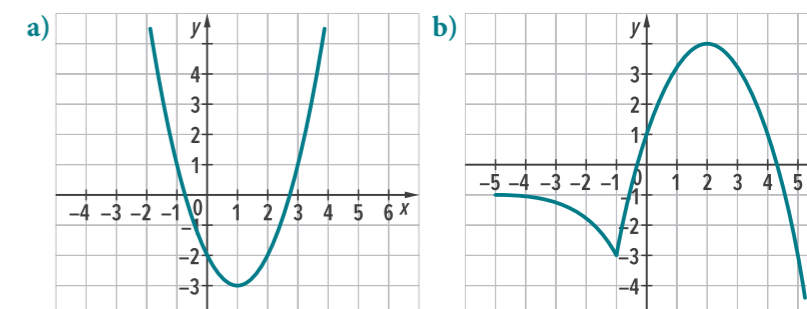
Funkcijos reikšmės yra teigiamos, kai  $x \in [-5; -3]$  ir  $x \in (2; 6)$ .

Funkcijos reikšmės yra neigiamos, kai  $x \in (-3; 2)$  ir  $x \in (6; 7]$ .

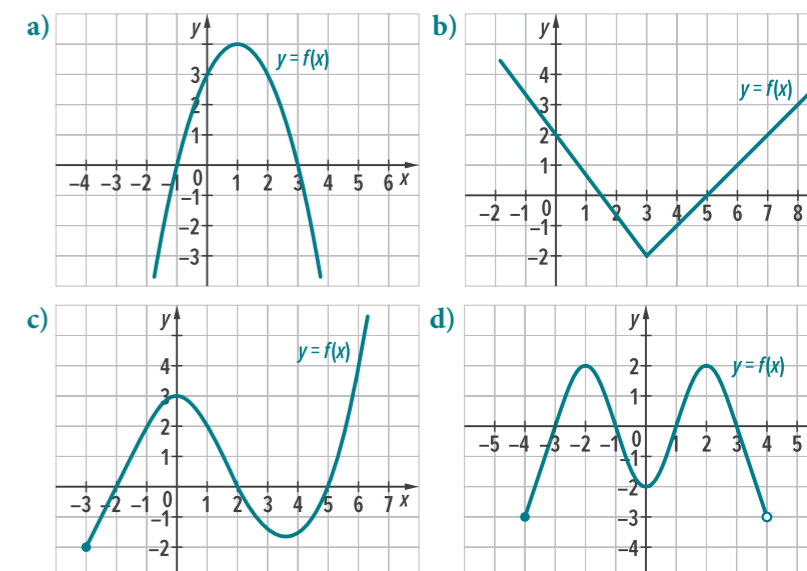
- 8** Remdamiesi pateiktu funkcijos grafiku nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį ir reikšmių sritį.



- 9** Iš funkcijos grafiko nustatykite, su kuriomis  $x$  reikšmėmis funkcija yra didėjančioji, su kuriomis – mažėjančioji.

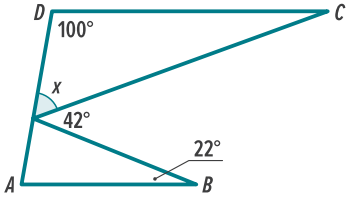
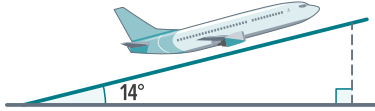


- 10** Iš funkcijos  $y = f(x)$  grafiko nustatykite, su kuriomis  $x$  reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos, su kuriomis – neigiamos.




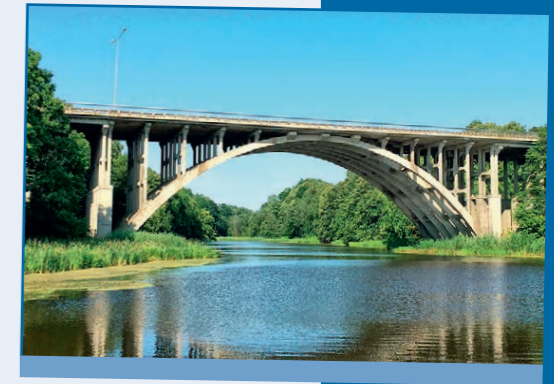


# KARTOJIMO UŽDAVINIAI

- Rokas yra du kartus vyresnis už Jonę. Prieš ketverius metus Roko amžius buvo 6 metais mažesnis už tris kartus padidintą Jonės amžių. Kokio amžiaus bus Rokas po 2 metų?
- Apskaičiuokite:
  - $\frac{\sqrt{12}}{5} \cdot \frac{\sqrt{60}}{2^4} \cdot \frac{\sqrt{45}}{3^2}$ ;
  - $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}$ ;
  - $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)}$ .
- Apskaičiuokite  $a + b + c$  reikšmę, jei  $a + b = 8$ ,  $b + c = 11$ ,  $a + c = 5$ .
- Apskaičiuokite:
  - $x + y$  reikšmę, jei  $x - y = \frac{1}{2}$  ir  $x^2 - y^2 = 3$ ;
  - $2xy$  reikšmę, jei  $x + y = -3$  ir  $x^2 + y^2 = 12$ .
- Domas dirba bilietus į renginius parduodančioje įmonėje. Už kiekvieną parduotą bilietą jis uždirba po 11 eurų. Už kiekvieną bilietą, viršijusį 100 bilietų skaičių, jis uždirba papildomai po 2 eurus. Kiek bilietų pardavė Domas, jei įmonė jam sumokėjo 2400 eurų?
- Justė, sulankstydama popieriaus lapą į 5 lygias dalis pagal lapo ilgį ir į 4 lygias dalis pagal lapo plotį, gavo kvadratą. Kokio ilgio ir pločio buvo lapas, jei jo perimetras lygus 378 cm?
- Mechaninis laikrodis rodo ketvirtą valandą. Po kokio trumpiausio laiko minutinė laikrodžio rodyklė pavys valandinę rodyklę?
- Automobilio greitis tam tikrame remontuojamame kelio ruože sumažėjo 40 %. Kiek kartų pailgėjo laikas, per kurį automobilis nuvažiavo šį atstumą?
- Atsukus tik šalto vandens čiaupą indas pripildomas vandens per 40 min, o tik karšto vandens čiaupą – 2 kartus greičiau. Kuri indo dalis bus pripildyta per  $m$  minučių, vienu metu atsukus abu čiaupus?
- Apskaičiuokite kampo  $x$  didumą, jei yra žinoma, kad tiesės  $AB$  ir  $CD$  yra lygiagrečios (žr. brėžinį).
 
- Su kuriomis  $x$  reikšmėmis dvinario  $4x - 1$  reikšmės priklauso intervalui  $[-5; 3)$ ?
- Trikampio kraštinių ilgiai yra 5 cm, 6 cm ir 9 cm. Apskaičiuokite šį trikampį panašaus trikampio, kurio perimetras 50 cm, trumpiausios kraštinės ilgį.
- Įrodykite, kad trupmenos  $\frac{(x - 2y)^2 - (x + 2y)^2 + 4y^2}{4xy - 2y^2}$  reikšmė nepriklauso nuo kintamųjų  $x$  ir  $y$  reikšmių.
- Lėktuvas 165 km/h greičiu 12 minučių kilo trajektorija, sudarančia  $14^\circ$  kampą su horizontu. Apskaičiuokite:
  - atstumą, kurį lėktuvas nuskrido per 12 minučių;
  - aukštį, į kurį lėktuvas pakilo per 12 minučių. Atsakymą pateikite metrais ir pėdomis (1 pėda = 30,48 cm), suapvalinę nurodytus matavimo rezultatus iki dešimčių.
- Keturi redaktoriai gali suredaguoti 4 dokumentus per 4 valandas. Kiek redaktorių reikės 80-čiai tokių pat dokumentų suredaguoti per 2 valandas, jei visi redaktoriai dokumentus redaguos tuo pačiu pastoviu greičiu?

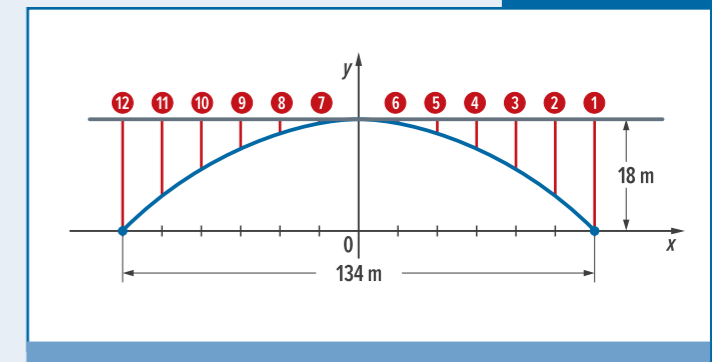
## Tiltai

 Keliaudami Lietuvoje arba užsienyje tikriausiai ne kartą matėte labai gražių tiltų su viena ar keliomis arkomis. Šios arkos yra apytiksliai parabolės formos. Remiantis parabolės lygtimi, galima sužinoti tiltų atramų aukštį arba, žinant atramos aukštį, apskaičiuoti, koku atstumu nuo tilto pradžios yra ši atrama ir pan.




## Užduotys

- Kauno marių regioniniame parke tiltas nutiestas per Krūnos upę. Šio tilto ilgis 134 m, o aukštis 18 m.
  - Nubraižykime šį tiltą koordinatinių plokštumoje. Aukščiausią tilto tašką (parabolės viršūnę) patogiu žymėti ašyje  $Oy$ . Tada tiltas bus nubraižytas simetriškai ašies  $Oy$  atžvilgiu. Parašykite brėžinyje pavaizduotos parabolės lygtį.
  - Apskaičiuokite dvylikos atramų ilgius. Atsakymą pateikite 0,1 m tikslumu.



- Vokietijos žemėje Saksonijoje yra pasakiško grožio „Devil's Bridge“ tiltas (Velnio tiltas). Šis tiltas stovi Kromlau miškuose. Dėl savo išvaizdos ir seno amžiaus (pastatytas 1860 m.) jis yra vienas garsiausių pasaulio tiltų. Tiltas specialiai išlenktas taip, kad kartu su savo atspindžiu vandenyje sudarytų figūrą, primenančią apskritimą. Tiltas aukštis 6,5 m, o plotis prie žemės apytiksliai lygus 15,6 m.
  - Laikydami, kad tiltas yra parabolės formos, koordinatinių plokštumoje nubraižykite šį tiltą vaizduojančią parabolę.
  - Parašykite šios parabolės lygtį.
  - Nustatykite, koks yra tilto aukštis 3 m atstumu nuo tilto pradžios (arba pabaigos). Atsakymą pateikite 0,1 m tikslumu.



-  **3** Pasidomėkite, koks arkinis tiltas yra arčiausiai jūsų gyvenamosios vietos. Sužinokite šio tilto matmenis (aukštį ir plotį prie žemės). Koordinatinių plokštumoje nubraižykite tiltą atitinkančią parabolę ir parašykite jos lygtį.